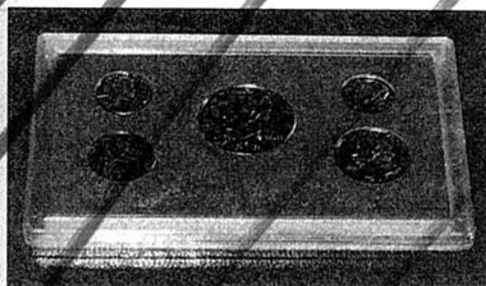
70. ***Elegir monedas*** La fotografía presenta una muestra de las monedas de Estados Unidos para 1996, la cual contiene una moneda de 5 centavos, una de 10, una de 25 y una de 50 centavos. Repita el ejercicio 69, pero esta vez reemplace "billetes" por "monedas".



71. Al descubrir la expresión (2^n) para determinar el número de subconjuntos de un conjunto con n elementos, observamos que para los primeros valores de n, al aumentar en uno el número de elementos se duplicaba el número de subconjuntos. En este ejercicio puede comprobar la fórmula general mostrando que lo mismo es cierto para cualquier valor de n. Suponga que A tiene n elementos y s subconjuntos. Ahora agregue un elemento, digamos, e, al conjunto A. (Ahora tenemos un nuevo conjunto, digamos, B, con $n + 1$ elementos.) Divida los subconjuntos de B en aquellos que contienen el elemento e y los que no lo contienen.

(a) ¿Cuántos subconjuntos de B no contienen a e? (*Una pista:* Cada uno de éstos es un subconjunto del conjunto original A.)

(b) ¿Cuántos subconjuntos de B sí contienen a e? (*Una pista:* Cada uno de éstos sería un subconjunto del conjunto original A, más el elemento e.)

(c) ¿Cuál es el número total de subconjuntos de B?

(d) ¿Qué puede concluir usted de lo anterior?

72. Explique por qué $\{\emptyset\}$ tiene a $\emptyset$ como un subconjunto y también tiene a $\emptyset$ como un elemento.

2.3 Operaciones con conjuntos y productos cartesianos

Intersección de conjuntos Dos candidatos, Adelaide Boettner y David Berman, contienden por un escaño en el Ayuntamiento de la ciudad. Una electora que está decidiendo por quien votar recordó las siguientes promesas hechas por los candidatos. Cada promesa está representada por una letra.

La honrada Adelaide Boettner	El decidido David Berman
Menor gasto, m	Menor gasto, m
Énfasis en el cumplimiento de las leyes de transporte, t	Acabar con políticos corruptos, p
Aumento en los servicios en áreas suburbanas, s	Aumento en los servicios de la ciudad, c

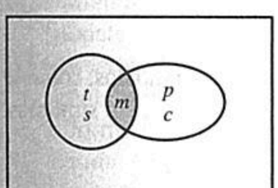


FIGURA 4

La única promesa en que coinciden ambos candidatos es la m, menor gasto. Suponga que tomamos las promesas de cada candidato como un conjunto. Las promesas de Boettner forman el conjunto $\{m, t, s\}$, mientras que las de Berman forman el conjunto $\{m, p, c\}$. El único elemento común a los dos conjuntos es m; este elemento pertenece a la *intersección* de los dos conjuntos, $\{m, t, s\}$ y $\{m, p, c\}$, como se muestra en la zona sombreada del diagrama de Venn de la figura 4. En símbolos,

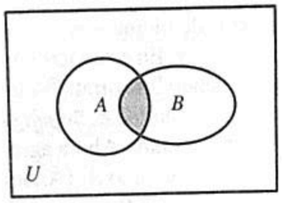
$$\{m, t, s\} \cap \{m, p, c\} = \{m\},$$

donde el símbolo $\cap$ representa la intersección. Observe que la intersección entre dos conjuntos es en sí mismo un conjunto.

Intersección de conjuntos

La **intersección** de los conjuntos A y B, que se escribe $A \cap B$, es el conjunto de elementos comunes a ambos conjuntos A y B, esto es:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \in B\}.$$



$A \cap B$

FIGURA 5

Forme la intersección de los conjuntos A y B tomando todos los elementos que se encuentran en ambos conjuntos, como lo muestra la zona sombreada de la figura 5.

EJEMPLO 1 Encuentre la intersección de los siguientes conjuntos.

(a) $\{3, 4, 5, 6, 7\}$ y $\{4, 6, 8, 10\}$

Puesto que los elementos comunes a los dos conjuntos son 4 y 6,

$$\{3, 4, 5, 6, 7\} \cap \{4, 6, 8, 10\} = \{4, 6\}.$$

(b) $\{9, 14, 25, 30\}$ y $\{10, 17, 19, 38, 52\}$

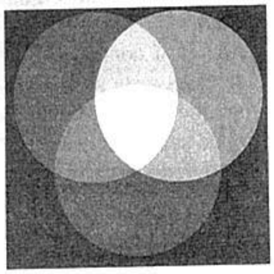
Estos dos conjuntos no tienen elementos en común, de modo que

$$\{9, 14, 25, 30\} \cap \{10, 17, 19, 38, 52\} = \emptyset.$$

(c) $\{5, 9, 11\}$ y $\emptyset$

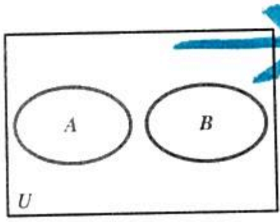
No existen elementos en $\emptyset$, por lo que no puede haber elementos que pertenezcan a ambos conjuntos. Por lo tanto,

$$\{5, 9, 11\} \cap \emptyset = \emptyset.$$



La luz blanca puede considerarse como la intersección de los tres colores primarios.

En los ejemplos 1(b) y 1(c) mostramos dos conjuntos que no tienen elementos en común. Los conjuntos que no tienen elementos en común reciben el nombre de **conjuntos disjuntos**. Un conjunto formado por perros y otro formado por gatos serían conjuntos disjuntos. En lenguaje matemático, los conjuntos A y B serán disjuntos siempre y cuando $A \cap B = \emptyset$. En la figura 6 aparecen dos conjuntos disjuntos.



Conjuntos disconjuntos

FIGURA 6

Unión de conjuntos Al inicio de esta sección mostramos las listas de las promesas hechas por dos candidatos a formar parte del Ayuntamiento. Suponga que un encuestador quiere resumir, para su oficina, los tipos de promesas hechas por los candidatos. El encuestador necesitará analizar *todas* las promesas hechas por *uno u otro* candidato, o lo que es lo mismo, el conjunto

$$\{m, t, s, p, c\},$$

es decir, la *unión* de los conjuntos de las promesas hechas por los candidatos, como se muestra en la zona sombreada en el diagrama de Venn en la figura 7. En símbolos,

$$\{m, t, s\} \cup \{m, p, c\} = \{m, t, s, p, c\},$$

donde el símbolo en forma de u, $\cup$, denota la unión de los conjuntos. Es importante no confundir este símbolo con el conjunto universal U. Nuevamente, la unión de dos conjuntos también es un conjunto.

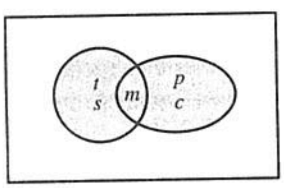
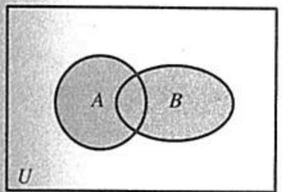


FIGURA 7

Unión de conjuntos

La **unión** de los conjuntos A y B, que se escribe $A \cup B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a ambos conjuntos, o

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}.$$



$A \cup B$

FIGURA 8

Forme la unión de los conjuntos A y B tomando los elementos de A y agregándole luego los elementos de B que no hayan estado antes en A, como lo muestra la zona sombreada en la figura 8.

EJEMPLO 2 Encuentre la unión de los siguientes conjuntos.

(a) $\{2, 4, 6\}$ y $\{4, 6, 8, 10, 12\}$

Comience por enumerar todos los elementos del primer conjunto, 2, 4 y 6. Después liste los elementos del segundo conjunto que no estén en el primer conjunto; estos elementos son 8, 10 y 12. La unión está formada por todos estos elementos, o lo que es lo mismo,

$$\{2, 4, 6\} \cup \{4, 6, 8, 10, 12\} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}.$$

(b) $\{\text{a, b, d, f, g, h}\}$ y $\{\text{c, f, g, h, k}\}$

La unión de estos dos conjuntos es:

$$\{\text{a, b, d, f, g, h}\} \cup \{\text{c, f, g, h, k}\} = \{\text{a, b, c, d, f, g, h, k}\}.$$

(c) $\{3, 4, 5\}$ y $\emptyset$

Como el conjunto $\emptyset$ carece de elementos, la unión de $\{3, 4, 5\}$ con $\emptyset$ contiene sólo los elementos 3, 4 y 5. Esto es:

$$\{3, 4, 5\} \cup \emptyset = \{3, 4, 5\}.$$

PARA REFLEXIONAR

Las operaciones aritméticas de suma y multiplicación, aplicadas a los números, muestran algunas propiedades que nos son familiares. Si a, b y c son números reales, la **propiedad conmutativa de la suma** señala que el orden de los sumandos no altera la suma: $a + b = b + a$. (¿Existe una **propiedad conmutativa de la multiplicación**?) La **propiedad asociativa de la suma** señala que cuando se suman tres números, la forma de agruparlos no implica diferencia alguna: $(a + b) + c = a + (b + c)$. (¿Existe una **propiedad asociativa de la multiplicación**?) Al número 0 se le conoce como **elemento identidad para la suma**, ya que si sumamos 0 a cualquier otro número, este último no cambia: $a + 0 = a$. (¿Cuál es el **elemento identidad para la multiplicación**?) Por último, la **propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma** señala que $a(b + c) = ab + ac$. (¿Existe una propiedad distributiva de la suma sobre la multiplicación?)

Para análisis en grupo

Ahora considere las operaciones de unión e intersección aplicadas a los conjuntos. Utilice las definiciones anteriores o desarrolle ejemplos para responder las siguientes preguntas.

1. ¿La unión de conjuntos es conmutativa? ¿Y la intersección?
2. ¿La unión de conjuntos es asociativa? ¿Y la intersección?
3. ¿Existirá algún elemento identidad para la unión de conjuntos? Si existe, ¿cuál cree que sea? ¿Y de la intersección de conjuntos?
4. ¿Será la intersección de conjuntos distributiva sobre la unión? ¿Será la unión de conjuntos distributiva sobre la intersección?

Recuerde, de la sección anterior, que A' representa el *complemento* del conjunto A. El conjunto A' se forma tomando todos los elementos del conjunto universal U que no se encuentran en A.

EJEMPLO 3 Sea
$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9\},$$
$$A = \{1, 2, 3, 4\},$$
$$B = \{2, 4, 6\},$$
$$C = \{1, 3, 6, 9\}.$$

Encuentre cada uno de los siguientes conjuntos.

(a) $A' \cap B$

Primero identifique los elementos del conjunto A'; éstos son los elementos de U que no aparecen en el conjunto A:

$$A' = \{5, 6, 9\}.$$

Ahora encuentre $A' \cap B$, o sea, los elementos que pertenecen tanto a A' como a B:

$$A' \cap B = \{5, 6, 9\} \cap \{2, 4, 6\} = \{6\}.$$

(b) $B' \cup C' = \{1, 3, 5, 9\} \cup \{2, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 9\}.$

(c) $A \cap (B \cup C')$

Primero encuentre el conjunto de los elementos dentro del paréntesis:

$$B \cup C' = \{2, 4, 6\} \cup \{2, 4, 5\} = \{2, 4, 5, 6\}.$$

Ahora, determine la intersección de este conjunto con A.

$$\begin{aligned} A \cap (B \cup C') &= A \cap \{2, 4, 5, 6\} \\ &= \{1, 2, 3, 4\} \cap \{2, 4, 5, 6\} \\ &= \{2, 4\} \end{aligned}$$

(d) $(A' \cup C') \cap B'$

El conjunto $A' = \{5, 6, 9\}$ y el conjunto $C' = \{2, 4, 5\}$, con

$$A' \cup C' = \{5, 6, 9\} \cup \{2, 4, 5\} = \{2, 4, 5, 6, 9\}.$$

El conjunto B' es $\{1, 3, 5, 9\}$, por lo tanto

$$(A' \cup C') \cap B' = \{2, 4, 5, 6, 9\} \cap \{1, 3, 5, 9\} = \{5, 9\}.$$ ■

Con frecuencia se dice que las matemáticas son un "lenguaje". Como tal, tiene la ventaja de contar con un simbolismo conciso. Por ejemplo, el conjunto $(A \cap B)' \cup C$ es menos difícil de entender que cuando se expresa en palabras. Un intento podría ser el siguiente: "El conjunto cuyos elementos no están en A y tampoco en B, o que están en C". Las palabras clave aquí (*no, y, o*) serán analizadas más a fondo en el capítulo sobre lógica.

EJEMPLO 4 Describa con palabras cada uno de los siguientes conjuntos.

(a) $A \cap (B \cup C')$

Este conjunto podría ser descrito como "el conjunto de todos los elementos que se encuentran en A, y se encuentran en B o no se encuentran en C".

(b) $(A' \cup C') \cap B'$

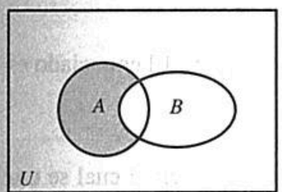
Una posibilidad es: "el conjunto de todos los elementos que no se encuentran en A o tampoco en C, y no están en B". ■

Diferencia de conjuntos Otra operación de los conjuntos es la *diferencia* entre dos conjuntos. Suponga que $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$. Si los elementos de B son excluidos (o retirados) de A, se obtiene el conjunto $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$. A C se le denomina la diferencia entre los conjuntos A y B.

Diferencia entre conjuntos

La **diferencia** entre los conjuntos A y B, que se escribe $A - B$, es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B, o

$$\boldsymbol{A - B = \{x \mid x \in A \text{ y } x \notin B\}}.$$



$A - B$

FIGURA 9

Puesto que $x \notin B$ significa lo mismo que $x \in B'$, el conjunto diferencia $A - B$ puede expresarse como $\{x \mid x \in A \text{ y } x \in B'\}$, o $A \cap B'$. La figura 9 ilustra la idea de la diferencia entre dos conjuntos. La región sombreada representa $A - B$.

EJEMPLO 5 Sean
$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\},$$
$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$
$$B = \{2, 3, 6\},$$
$$C = \{3, 5, 7\}.$$

Encuentre cada uno de los siguientes conjuntos.

(a) $A - B$

Comience con el conjunto A y elimine los elementos que también pertenezcan a B. Así,

$$A - B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} - \{2, 3, 6\} = \{1, 4, 5\}.$$

(b) $B - A$

Para que un elemento se encuentre en $B - A$, deberá estar en B y no pertenecer a A. Pero como todos los elementos de B están en A, entonces $B - A = \emptyset$.

(c) $(A - B) \cup C'$

Del inciso (a), $A - B = \{1, 4, 5\}$. Por otra parte, $C' = \{1, 2, 4, 6\}$, por lo tanto

$$(A - B) \cup C' = \{1, 2, 4, 5, 6\}.$$ ■

Los resultados de los ejemplos 5(a) y 5(b) nos muestran que, en general,

$$A - B \neq B - A.$$

Pares ordenados Cuando enumeramos un conjunto que tiene varios elementos, el orden en que aparecen estos elementos es irrelevante. Por ejemplo, $\{1, 5\} = \{5, 1\}$. Sin embargo, existen muchos ejemplos en matemáticas en donde, cuando dos objetos forman un par, el orden en el cual están escritos sí resulta importante. Esto nos lleva al concepto del *par ordenado*. Cuando se escribe un par ordenado, se utilizan paréntesis (a diferencia de los corchetes, que se reservan para los conjuntos).

Pares ordenados

En el **par ordenado** (a, b), a se denomina **primer componente** y b **segundo componente**. En general, $(a, b) \neq (b, a)$.

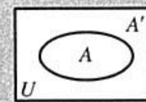
A continuación presentamos las operaciones más comunes entre conjuntos, con sus diagramas de Venn correspondientes.

Operaciones entre conjuntos

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera, donde U es el conjunto universal.

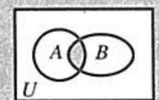
El **complemento** de A, simbolizado como A', es

$$A' = \{x | x \in U \text{ y } x \notin A\}.$$



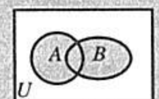
La **intersección** de A y B es

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ y } x \in B\}.$$



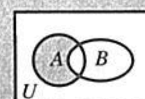
La **unión** de A y B es

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ o } x \in B\}.$$



La **diferencia** de A y B es

$$A - B = \{x | x \in A \text{ y } x \notin B\}.$$



~~El **producto cartesiano** de A y B es~~

~~$A \times B = \{(x, y) | x \in A \text{ y } y \in B\}$.~~

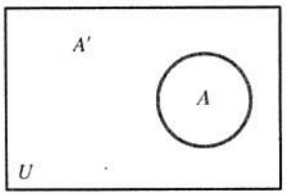
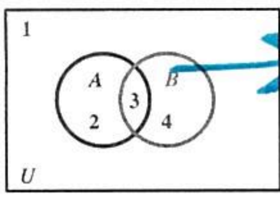


FIGURA 10



La numeración es arbitraria. Los números indican cuatro regiones, no números cardinales.

FIGURA 11

Diagramas de Venn Cuando trabajamos con un solo conjunto, podemos utilizar un diagrama de Venn, como se puede observar en la figura 10. El conjunto universal U se divide en dos regiones, una que representa al conjunto A y la otra que representa al conjunto A'.

Dos conjuntos A y B dentro del conjunto universal sugieren un diagrama de Venn como el de la figura 11, donde las cuatro regiones resultantes han sido numeradas con el fin de proporcionar una forma conveniente para referirse a ellas (la numeración es arbitraria). La región 1 contiene aquellos elementos fuera de los conjuntos A y B. La región 2 contiene los elementos de A que no están en B. La región 3 contiene los elementos que están en A y en B. ¿Cómo describiría los elementos de la región 4?

EJEMPLO 10 Dibuje un diagrama de Venn similar al de la figura 11 y sombree la región o las regiones que representan los siguientes conjuntos.

(a) $A' \cap B$

Observe la figura 11. El conjunto A' contiene todos los elementos fuera del conjunto A; en otras palabras, contiene todos los elementos de las regiones 1 y 4. El conjunto B está formado por los elementos de las regiones 3 y 4. La intersección de los conjuntos A' y B, el conjunto $A' \cap B$, está constituido por los elementos de la región en común a (1 y 4) y (3 y 4); esto es, la región 4. Por lo tanto, $A' \cap B$ está representado por la región 4, la cual está sombreada en la figura 12. Esta región puede describirse también como $B - A$.

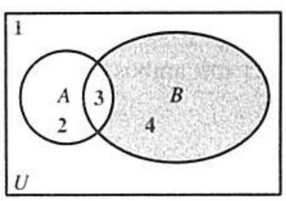


FIGURA 12

(b) $A' \cup B'$

Una vez más, el conjunto A' está representado por las regiones 1 y 4, mientras que el conjunto B' está conformado por las regiones 1 y 2. La unión de A' y B', el conjunto $A' \cup B'$, está formado por los elementos que pertenecen a la unión de las regiones 1, 2 y 4, y que aparecen sombreadas en la figura 13. ■

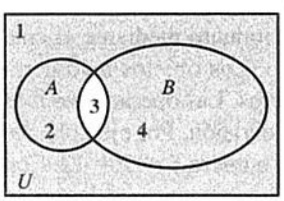


FIGURA 13

Cuando cada elemento de los conjuntos A y B son conocidos, en ocasiones resulta útil mostrar dónde se encuentran ubicados los mismos dentro del diagrama de Venn.

EJEMPLO 11 Sea $U = \{q, r, s, t, u, v, w, x, y, z\}$,

$$A = \{r, s, t, u, v\},$$

$$B = \{t, v, x\}.$$

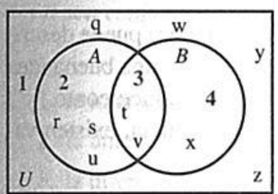
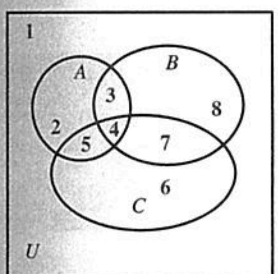


FIGURA 14

Coloque los elementos de estos conjuntos en su correcta posición en un diagrama de Venn.

Puesto que $A \cap B = \{t, v\}$, los elementos t y v están colocados dentro de la región 3 de la figura 14. Los elementos restantes de A, que son r, s y u, van dentro de la región 2. La figura muestra la ubicación correcta de los demás elementos. ■



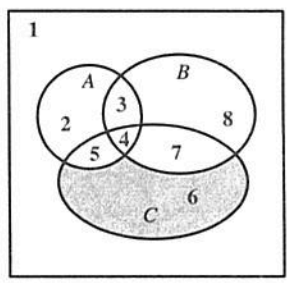
La numeración es arbitraria. Los números indican regiones, no números cardinales ni elementos.

FIGURA 15

Para representar tres conjuntos dentro de un conjunto universal, dibuje un diagrama de Venn como el que se muestra en la figura 15, donde la numeración de las regiones es arbitraria nuevamente.

EJEMPLO 12 Sombree el conjunto $(A \cap B') \cap C$ en un diagrama de Venn similar al de la figura 15.

Trabaje primero la parte interior del paréntesis. Como se muestra en la figura 16, el conjunto A' esta formado por las regiones fuera del conjunto A, es decir, por las regiones 1, 6, 7 y 8. El conjunto B' está formado por las regiones 1, 2, 5 y 6. La intersección de estos conjuntos es el sitio donde se traslapan las regiones 1, 6, 7, 8 con 1, 2, 5, 6, o las regiones 1 y 6. Para el diagrama de Venn final, determine la intersección de las regiones 1 y 6 con el conjunto C. Como se puede observar en la figura 16, el conjunto C está formado por las regiones 4, 5, 6 y 7. La zona donde se traslapan las regiones 1, 6 y 4, 5, 6, 7 es la región 6, la cual se encuentra sombreada en la figura 16.



$(A' \cap B') \cap C$

FIGURA 16

■

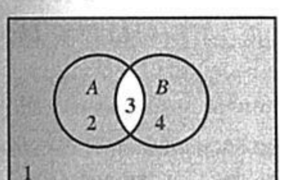
EJEMPLO 13 ¿Es la proposición

$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

cierta para cualquier elección de los conjuntos A y B?

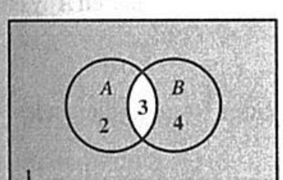
Como ayuda para decidir la respuesta, utilice las regiones marcadas en la figura 11. El conjunto $A \cap B$ está formado por la región 3, por lo tanto, $(A \cap B)'$ está formado por las regiones 1, 2 y 4. Dichas regiones se presentan sombreadas en la figura 17(a).

Para encontrar un diagrama de Venn del conjunto $A' \cup B'$, primero confirme que A' está formado por las regiones 1 y 4, mientras que el conjunto B' incluye las regiones 1 y 2. Finalmente, $A' \cup B'$ está formado por las regiones 1 y 4, o por las regiones 1 y 2; esto es, por las regiones 1, 2 y 4. Estas regiones se presentan sombreadas en la figura 17(b).



$(A \cap B)'$ aparece sombreado.

(a)



$A' \cup B'$ aparece sombreado.

(b)

FIGURA 17

2.3 EJERCICIOS

Relacione cada término de la columna I con la designación que le corresponde de la columna II. Suponga que A y B son conjuntos.

I

1. la intersección de A y B
2. la unión de A y B
3. la diferencia de A y B
4. el complemento de A
5. el producto cartesiano de A y B
6. la diferencia de B y A

II

A. el conjunto de elementos en A que no están en B
B. el conjunto de elementos comunes a A y a B
C. el conjunto de elementos en el universo que no están en A
D. el conjunto de elementos en B que no están en A
E. el conjunto de pares ordenados tales que cada primer elemento es de A y cada segundo elemento es de B, con cada elemento de A pareado con cada elemento de B
F. el conjunto de elementos que están en A o en B o tanto en A como en B

Realice las siguientes operaciones.

$$\text{Sean}\quad \begin{aligned} U &= \{a, b, c, d, e, f, g\},\\ X &= \{a, c, e, g\},\\ Y &= \{a, b, c\},\\ Z &= \{b, c, d, e, f\}. \end{aligned}$$

7. $X \cap Y$	**8.** $X \cup Y$	**9.** $Y \cup Z$	**10.** $Y \cap Z$
11. $X \cup U$	**12.** $Y \cap U$	**13.** X'	**14.** Y'
15. $X' \cap Y'$	**16.** $X' \cap Z$	**17.** $X \cup (Y \cap Z)$	**18.** $Y \cap (X \cup Z)$
19. $(Y \cap Z') \cup X$	**20.** $(X' \cup Y') \cup Z$	**21.** $(Z \cup X')' \cap Y$	**22.** $(Y \cap X')' \cup Z'$
23. $X - Y$	**24.** $Y - X$	**25.** $X' - Y$	**26.** $Y' - X$
27. $X \cap (X - Y)$	**28.** $Y \cup (Y - X)$		

Describa cada uno de los siguientes conjuntos en palabras.

29. $A \cup (B' \cap C')$	**30.** $(A \cap B') \cup (B \cap A')$	**31.** $(C - B) \cup A$
32. $B \cap (A' - C)$	**33.** $(A - C) \cup (B - C)$	**34.** $(A' \cap B') \cup C'$

Efectos negativos del alcohol y el tabaco *La tabla muestra los efectos negativos del uso prolongado del tabaco y el alcohol.*

Tabaco	Alcohol
Enfisema, e	Daño al hígado, l
Daño al corazón, h	Daño al cerebro, b
Cáncer, c	Daño al corazón, h

Sea T el conjunto de todos los efectos producidos por el uso del tabaco y A el conjunto de los efectos producidos por el alcohol.

35. el conjunto universal más pequeño posible, U, que incluya a todos los efectos mencionados

36. A'	**37.** T'	**38.** $T \cap A$	**39.** $T \cup A$	**40.** $T \cap A'$

En los ejercicios 41 al 46, describa con palabras cada uno de los conjuntos.

Sea U = el conjunto de todas las devoluciones de impuestos,
A = el conjunto de todas las devoluciones de impuestos con deducciones pormenorizadas,
B = el conjunto de todas las devoluciones de impuestos mostrando los ingresos del negocio,
C = el conjunto de todas las devoluciones de impuestos archivadas en 2003,
D = el conjunto de todas las devoluciones de impuestos seleccionadas para una auditoría.

41. $B \cup C$
42. $A \cap D$
43. $C - A$
44. $D \cup A'$
45. $(A \cup B) - D$
46. $(C \cap A) \cap B'$

Suponiendo que A y B representan dos conjuntos cualesquiera, indique si cada uno de los siguientes enunciados es siempre verdadero *o* no siempre verdadero.

47. $A \subseteq (A \cup B)$
48. $A \subseteq (A \cap B)$
49. $(A \cap B) \subseteq A$
50. $(A \cup B) \subseteq A$
51. $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
52. $n(A \cap B) = n(A) - n(B)$
53. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
54. $n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$

Para los ejercicios 55 al 62, utilice los resultados de las secciones anteriores para responder la última parte.

Sean $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
$X = \{1, 3, 5\}$,
$Y = \{1, 2, 3\}$,
$Z = \{3, 4, 5\}$.

55. **(a)** Encuentre $X \cup Y$. **(b)** Encuentre $Y \cup X$.
(c) Emita una conjetura.

56. **(a)** Encuentre $X \cap Y$. **(b)** Encuentre $Y \cap X$.
(c) Emita una conjetura.

57. **(a)** Encuentre $X \cup (Y \cup Z)$.
(b) Encuentre $(X \cup Y) \cup Z$.
(c) Emita una conjetura.

58. **(a)** Encuentre $X \cap (Y \cap Z)$.
(b) Encuentre $(X \cap Y) \cap Z$.
(c) Emita una conjetura.

59. **(a)** Encuentre $(X \cup Y)'$. **(b)** Encuentre $X' \cap Y'$.
(c) Emita una conjetura.

60. **(a)** Encuentre $(X \cap Y)'$. **(b)** Encuentre $X' \cup Y'$.
(c) Emita una conjetura.

61. **(a)** Encuentre $X \cup \emptyset$. **(b)** Emita una conjetura.

62. **(a)** Encuentre $X \cap \emptyset$. **(b)** Emita una conjetura.

Diga si cada enunciado es verdadero *o* falso.

63. $(3, 2) = (5 - 2, 1 + 1)$
64. $(10, 4) = (7 + 3, 5 - 1)$
65. $(6, 3) = (3, 6)$
66. $(2, 13) = (13, 2)$
67. $\{6, 3\} = \{3, 6\}$
68. $\{2, 13\} = \{13, 2\}$
69. $\{(1, 2), (3, 4)\} = \{(3, 4), (1, 2)\}$
70. $\{(5, 9), (4, 8), (4, 2)\} = \{(4, 8), (5, 9), (4, 2)\}$

Encuentre $A \times B$ y $B \times A$, para A y B definidos como sigue.

71. $A = \{2, 8, 12\}$, $B = \{4, 9\}$
72. $A = \{3, 6, 9, 12\}$, $B = \{6, 8\}$
73. $A = \{d, o, g\}$, $B = \{p, i, g\}$
74. $A = \{b, l, u, e\}$, $B = \{r, e, d\}$

Use la información dada para encontrar $n(A \times B)$ y $n(B \times A)$ en los ejercicios 75 a 78.

75. los conjuntos del ejercicio 71
76. los conjuntos del ejercicio 73
77. $n(A) = 35$ y $n(B) = 6$
78. $n(A) = 13$ y $n(B) = 5$

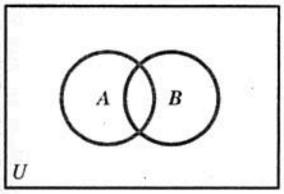
Encuentre el número cardinal especificado.

79. Si $n(A \times B) = 36$ y $n(A) = 12$, encuentre $n(B)$.

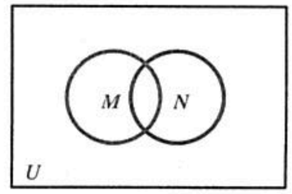
80. Si $n(A \times B) = 100$ y $n(B) = 4$, encuentre $n(A)$.

Coloque en el lugar correcto los elementos de estos conjuntos en el diagrama de Venn dado.

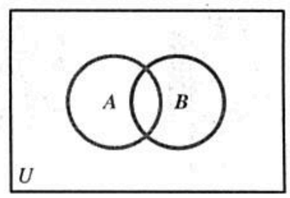
81. Sean $U = \{a, b, c, d, e, f, g\}$,
$A = \{b, d, f, g\}$,
$B = \{a, b, d, e, g\}$.



82. Sean $U = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$,
$M = \{5, 8, 10, 11\}$,
$N = \{5, 6, 7, 9, 10\}$.



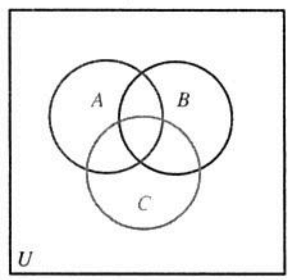
Utilice un diagrama de Venn similar al que aparece aquí para sombrear cada uno de los siguientes conjuntos.



83. $B \cap A'$ **84.** $A \cup B$ **85.** $A' \cup B$
86. $A' \cap B'$ **87.** $B' \cup A$ **88.** $A' \cup A$
89. $B' \cap B$ **90.** $A \cap B'$ **91.** $B' \cup (A' \cap B')$
92. $(A \cap B) \cup B$ **93.** U' **94.** $\emptyset'$

95. Sean $U = \{m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w\}$,
$A = \{m, n, p, q, r, t\}$,
$B = \{m, o, p, q, s, u\}$,
$C = \{m, o, p, r, s, t, u, v\}$.

Coloque en el lugar correcto los elementos de estos conjuntos en un diagrama de Venn similar al que se muestra aquí.



96. Sean $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
$A = \{1, 3, 5, 7\}$,
$B = \{1, 3, 4, 6, 8\}$,
$C = \{1, 4, 5, 6, 7, 9\}$.

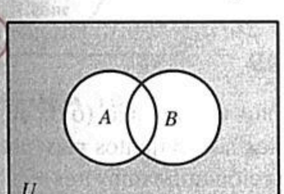
Coloque en el lugar correcto los elementos de estos conjuntos en un diagrama de Venn.

Utilice un diagrama de Venn para sombrear cada uno de los siguientes conjuntos.

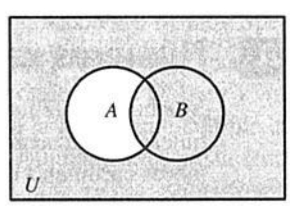
97. $(A \cap B) \cap C$ **98.** $(A \cap C') \cup B$ **99.** $(A \cap B) \cup C'$ **100.** $(A' \cap B) \cap C$
101. $(A' \cap B') \cap C$ **102.** $(A \cup B) \cup C$ **103.** $(A \cap B') \cup C$ **104.** $(A \cap C') \cap B$
105. $(A \cap B') \cap C'$ **106.** $(A' \cap B') \cup C$ **107.** $(A' \cap B') \cup C'$ **108.** $(A \cap B)' \cup C$

Redacte una descripción de cada área sombreada. Utilice los símbolos A, B, C, $\cap$, $\cup$, $-$ y $'$ según sea necesario. Puede haber más de una respuesta.

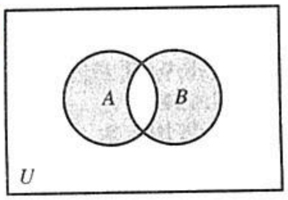
109.



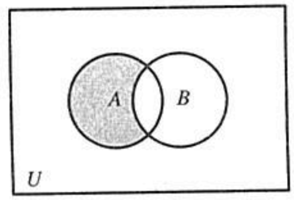
110.



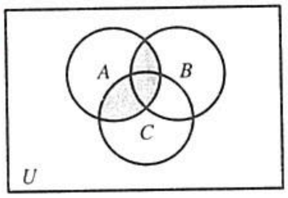
111.



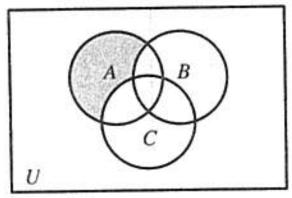
112.



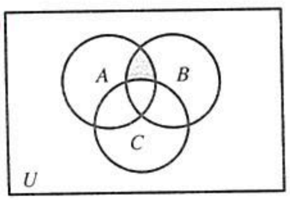
113.



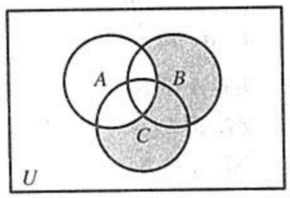
114.



115.



116.



Suponga que A y B son conjuntos. Describa las condiciones necesarias para que cada una de las proposiciones siguientes sea verdadera.

117. $A = A - B$ **118.** $A = B - A$ **119.** $A = A - \emptyset$ **120.** $A = \emptyset - A$

121. $A \cup \emptyset = \emptyset$ **122.** $A \cap \emptyset = \emptyset$ **123.** $A \cap \emptyset = A$ **124.** $A \cup \emptyset = A$

125. $A \cup A = \emptyset$ **126.** $A \cap A = \emptyset$

Para cada uno de los siguientes ejercicios, dibuje dos diagramas de Venn adecuados para decidir si el enunciado es siempre verdadero *o* no siempre verdadero.

127. $A \cap A' = \emptyset$

128. $A \cup A' = U$

129. $(A \cap B) \subseteq A$

130. $(A \cup B) \subseteq A$

131. Si $A \subseteq B$, entonces $A \cup B = A$.

132. Si $A \subseteq B$, entonces $A \cap B = B$.

133. $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (Segunda ley de De Morgan)

✎**134.** Dé ejemplos de cómo una lengua como el español, el inglés, el árabe o el vietnamita pueden tener una ventaja sobre el lenguaje simbólico de las matemáticas.

✎**135.** Si A y B son conjuntos, ¿es necesariamente cierto que $n(A - B) = n(A) - n(B)$? Explique su respuesta.

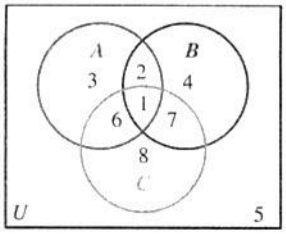
136. Si $Q = \{x \mid x \text{ es un número racional}\}$ y $H = \{x \mid x \text{ es un número irracional}\}$, describa cada uno de los siguientes conjuntos.

(a) $Q \cup H$ **(b)** $Q \cap H$

2.4 Números cardinales y encuestas

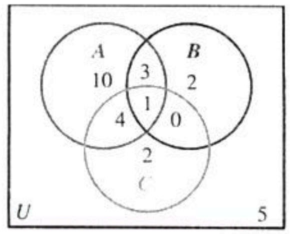
Muchos problemas que tienen que ver con conjuntos de personas (o de objetos) requieren analizar información conocida sobre ciertos subconjuntos para obtener números cardinales de otros subconjuntos. En esta sección utilizamos tres técnicas muy útiles para la solución de tales problemas: diagramas de Venn, fórmulas para obtener números cardinales y tablas. La "información conocida" se obtiene comúnmente (aunque no siempre) realizando una encuesta.

3.



(a) $A \cap B \cap C$ (b) $A \cap B \cap C'$
(c) $A \cap B' \cap C$ (d) $A' \cap B \cap C$
(e) $A' \cap B' \cap C$ (f) $A \cap B' \cap C'$
(g) $A' \cap B \cap C'$ (h) $A' \cap B' \cap C'$

4.



(a) $A \cap B \cap C$ (b) $A \cap B \cap C'$
(c) $A \cap B' \cap C$ (d) $A' \cap B \cap C$
(e) $A' \cap B' \cap C$ (f) $A \cap B' \cap C'$
(g) $A' \cap B \cap C'$ (h) $A' \cap B' \cap C'$

En los ejercicios del 5 al 8, utilice la fórmula adecuada.

5. Evalúe $n(A \cup B)$ si $n(A) = 8$, $n(B) = 14$ y $n(A \cap B) = 5$.

6. Evalúe $n(A \cap B)$ si $n(A) = 15$, $n(B) = 12$ y $n(A \cup B) = 25$.

7. Evalúe $n(A)$ si $n(B) = 20$, $n(A \cap B) = 6$ y $n(A \cup B) = 30$.

8. Evalúe $n(B)$ si $n(A) = 35$, $n(A \cap B) = 15$ y $n(A \cup B) = 55$.

Como preparación para los problemas de encuestas que se plantean más adelante en este conjunto de ejercicios, dibuje el diagrama de Venn adecuado y use la información proporcionada para colocar el número de elementos de cada región.

9. $n(U) = 43$, $n(A) = 25$, $n(A \cap B) = 5$, $n(B') = 30$

10. $n(A) = 19$, $n(B) = 13$, $n(A \cup B) = 25$, $n(A') = 11$

11. $n(A \cup B) = 15$, $n(A \cap B) = 8$, $n(A) = 13$, $n(A' \cup B') = 11$

12. $n(A') = 25$, $n(B) = 28$, $n(A' \cup B') = 40$, $n(A \cap B) = 10$

13. $n(A) = 24$, $n(B) = 24$, $n(C) = 26$, $n(A \cap B) = 10$, $n(B \cap C) = 8$, $n(A \cap C) = 15$, $n(A \cap B \cap C) = 6$, $n(U) = 50$

14. $n(A) = 57$, $n(A \cap B) = 35$, $n(A \cup B) = 81$, $n(A \cap B \cap C) = 15$, $n(A \cap C) = 21$, $n(B \cap C) = 25$, $n(C) = 49$, $n(B') = 52$

15. $n(A \cap B) = 21$, $n(A \cap B \cap C) = 6$, $n(A \cap C) = 26$, $n(B \cap C) = 7$, $n(A \cap C') = 20$, $n(B \cap C') = 25$, $n(C) = 40$, $n(A' \cap B' \cap C') = 2$

16. $n(A) = 15$, $n(A \cap B \cap C) = 5$, $n(A \cap C) = 13$, $n(A \cap B') = 9$, $n(B \cap C) = 8$, $n(A' \cap B' \cap C') = 21$, $n(B \cap C') = 3$, $n(B \cup C) = 32$

Utilice los diagramas de Venn para responder lo siguiente.

17. ***Colección de discos compactos*** Paula Story es fanática de la música de Paul Simon y Art Garfunkel. En su colección de 22 discos compactos, tiene los siguientes:

5 en los cuales cantan ambos, Simon y Garfunkel
8 en los que canta Simon,
7 en los que canta Garfunkel,
12 en los que no canta ninguno de ellos.

(a) ¿En cuántos de sus discos compactos sólo canta Paul Simon?

(b) ¿En cuántos de sus discos compactos sólo canta Art Garfunkel?

(c) ¿En cuántos canta al menos uno de estos artistas?

18. ***Componer y producir música*** Kent LaVoie escribe y produce álbumes para diversos músicos. El año pasado trabajó en 10 de tales proyectos.

Él escribió y produjo 2 proyectos.
Escribió un total de 5 proyectos
Produjo un total de 7 proyectos.

(a) ¿Cuántos proyectos escribió, pero no produjo?
(b) ¿Cuántos proyectos produjo, pero no escribió?

19. ***Ayuda financiera a estudiantes*** En la Universidad de Luisiana, la mitad de los 48 estudiantes con especialidad en matemáticas recibieron ayuda financiera del gobierno. De éstos,

5 disfrutaban la beca Pell
14 participaron en el Programa de Estudio-Trabajo de la universidad
4 tuvieron becas TOPS
2 tuvieron becas TOPS y participaron en el programa de Estudio-Trabajo.

Aquellos con beca Pell no contaron con ninguna otra ayuda gubernamental.

¿Cuántos de los estudiantes de matemáticas
(a) no tuvieron ayuda gubernamental?
(b) tuvieron más de una de estas tres ayudas?
(c) tuvieron ayuda gubernamental distinta de estas tres?
(d) tuvieron una beca TOPS o de Estudio-Trabajo?

20. ***Respuestas de los espectadores a las películas*** Julianne Peterson, una psicóloga del deporte, planeaba realizar un estudio sobre las respuestas de los espectadores a ciertos aspectos de las películas de béisbol *The Natural*, *Field of Dreams* y *The Rookie*. Después de encuestar a un grupo de 55 estudiantes, obtuvo la siguiente información:

17 vieron *The Natural*
17 vieron *Field of Dreams*
23 vieron *The Rookie*
6 vieron *The Natural* y *Field of Dreams*
8 vieron *The Natural* y *The Rookie*
10 vieron *Field of Dreams* y *The Rookie*
2 vieron las tres películas.

¿Cuántos estudiantes vieron
(a) exactamente dos de estas películas?
(b) exactamente una de estas películas?
(c) ninguna de estas películas?
(d) *The Natural*, pero ninguna de las otras?

21. ***Cata de vino*** La siguiente lista muestra las preferencias de 102 personas que asistieron a una reunión para catar vinos:

99 prefieren Spañada
96 prefieren Ripple
99 prefieren vino de manzana Boone's
95 prefieren Spañada y Ripple
94 prefieren Ripple y Boone's
96 prefieren Spañada y Boone's
93 prefieren los tres vinos.

¿A cuántas personas les gusta
(a) ninguno de los tres?
(b) Spañada, pero no Ripple?
(c) cualquiera excepto el vino de manzana Boone's?
(d) sólo el Ripple?
(e) exactamente dos tipos de vino?

22. ***Hábitos culinarios*** Robert Hurst (vea el ejemplo 3 del texto) fue reasignado otra vez, en esta ocasión al departamento de mantenimiento de la misma empresa de servicios eléctricos. Entrevistó a 140 personas en un centro comercial de un suburbio con el fin de averiguar algunas de sus costumbres para cocinar, y obtuvo los siguientes resultados. Hay una plaza disponible en Siberia. ¿Deberá ser reasignado una vez más?

58 utilizan horno de microondas
63 utilizan hornillas eléctricas
58 utilizan gas
19 utilizan horno de microondas y hornillas eléctricas
17 utilizan horno de microondas y gas
4 utilizan tanto gas como hornillas eléctricas
1 utiliza los tres
2 cocinan sólo con energía solar.

23. ***Temas de canciones*** Alguna vez se dijo que la música country enfatiza tres temas básicos: amor, prisión y camiones. Una encuesta de una estación local de música country arrojó la siguiente información:

12 canciones acerca de un conductor de camiones que está enamorado en prisión
13 canciones acerca de un prisionero enamorado
28 canciones acerca de una persona enamorada
18 canciones acerca de un conductor de camiones enamorado
3 canciones acerca de un conductor de camiones en prisión, quien no está enamorado
2 canciones acerca de personas que están en prisión, que no están enamoradas y no son conductores de camiones
8 canciones acerca de gente que se encuentra fuera de prisión, que no está enamorada y no maneja camiones
16 canciones acerca de conductores de camiones que no están en prisión.

(a) ¿Cuántas canciones fueron incluidas en la encuesta?

Encuentre el número de canciones acerca de:

(b) conductores de camiones
(c) prisioneros
(d) conductores de camiones en prisión
(e) personas que no están en prisión
(f) personas que no están enamoradas.

24. ***Aves en una granja*** La anciana MacDonald examinó sus aves de corral y obtuvo los siguientes resultados. Ella tiene:

9 gallos gordos de color rojizo	18 gallos flacos de color café
2 gallinas gordas de color rojizo	6 gallos flacos de color rojizo
26 gallos gordos	5 gallinas flacas de color rojizo
37 pollos gordos	7 gallinas flacas de color café

Conteste las siguientes preguntas acerca de estas aves. [*Una pista:* Necesita un diagrama de Venn con círculos para los animales gordos, para los que son machos (el gallo es macho y la gallina hembra) y para los de color rojizo (suponga que el rojizo y el café son opuestos en el mundo de los pollos. Además, "pollo" es genérico, es decir incluye gallos y gallinas.] ¿Cuántos pollos son

(a) gordos? **(b)** rojizos?
(c) machos? **(d)** gordos, pero no machos?
(e) cafés, pero no gordos? **(f)** rojizos y gordos?

25. ***Objetivos de los estudiantes*** Julie Ward, quien vende libros de texto universitarios, realizó una encuesta en un campus de la costa oeste para averiguar los principales objetivos que tienen los estudiantes en la actualidad.

Sea W = el conjunto de aquellos que quieren volverse ricos,
F = el conjunto de aquellos que quieren formar una familia,
E = el conjunto de aquellos que quieren convertirse en expertos en sus áreas.

Los hallazgos de Julie se resumen a continuación:

$n(W) = 160$ $\quad n(E \cap F) = 90$
$n(F) = 140$ $\quad n(W \cap F \cap E) = 80$
$n(E) = 130$ $\quad n(E') = 95$
$n(W \cap F) = 95$ $\quad n[(W \cup F \cup E)'] = 10.$

Encuentre el número total de estudiantes entrevistados.

26. ***Síntomas en pacientes en un hospital*** Samantha Walker realizó una encuesta con 75 pacientes admitidos en la unidad de cardiología del hospital de Honolulu durante un periodo de dos semanas.

Sea B = el conjunto de pacientes con presión arterial alta,
C = el conjunto de pacientes con nivel de colesterol alto,
F = el conjunto de pacientes que fuman cigarrillos.

La información de Samantha es la siguiente:

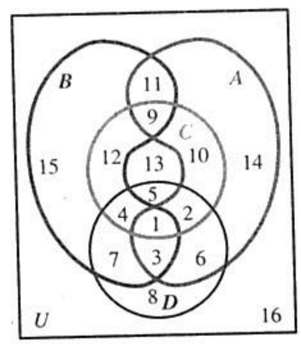
$n(B) = 47$ $\quad n(B \cap S) = 33$
$n(C) = 46$ $\quad n(B \cap C) = 31$
$n(S) = 52$ $\quad n(B \cap C \cap S) = 21$
$n[(B \cap C) \cup (B \cap S) \cup (C \cap S)] = 51.$

Encuentre el número de pacientes que

(a) tenían presión alta o colesterol alto, pero no ambos.
(b) tenían menos de dos de las condiciones indicadas en la lista.
(c) eran fumadores, pero no tenían presión alta ni colesterol alto.
(d) no presentaron exactamente dos de las condiciones de la lista.

27. La figura que aparece a continuación muestra a U dividido en 16 regiones por 4 conjuntos, A, B, C y D. Encuentre el número de regiones que pertenecen a cada uno de los siguientes conjuntos.

(a) $A \cap B \cap C \cap D$
(b) $A \cup B \cup C \cup D$
(c) $(A \cap B) \cup (C \cap D)$
(d) $(A' \cap B') \cap (C \cup D)$



28. ***Hábitos de los televidentes de deportes*** Una encuesta de 130 televidentes reveló la información siguiente:

52 ven fútbol	21 ven tenis y golf
56 ven baloncesto	3 ven fútbol, baloncesto y tenis
62 ven tenis	15 ven fútbol, baloncesto y golf
60 ven golf	10 ven fútbol, tenis y golf
21 ven fútbol y baloncesto	10 ven baloncesto, tenis y golf
19 ven fútbol y tenis	3 ven los cuatro deportes
22 ven baloncesto y tenis	5 no ven ninguno de estos deportes.
27 ven fútbol y golf	
30 ven baloncesto y golf	

Utilice un diagrama como el del ejercicio 27 para contestar las siguientes preguntas:

(a) ¿Cuántos de estos televidentes ven fútbol, baloncesto y tenis, pero no golf?
(b) ¿Cuántos de estos televidentes ven exactamente uno de los cuatro deportes?
(c) ¿Cuántos de estos televidentes ven exactamente dos de los cuatro deportes?

55. no está bien definido **57.** no está bien definido **59.** $\in$ **61.** $\notin$ **63.** $\in$ **65.** $\notin$ **67.** falso **69.** verdadero **71.** verdadero **73.** verdadero **75.** falso **77.** verdadero **79.** verdadero **81.** falso **83.** verdadero **87.** {2} y {3, 4} (Es posible dar otros ejemplos). **89.** {a, b} y {a, c} (Son posibles otros ejemplos). **91.** **(a)** {Viacom (Clase B), Trans World Airline, Harken Energy, Echo Bay Mines} **(b)** {Echo Bay Mines, JTS, Nabor Industries, Hasbro, Royal Oak Mines, Grey Wolf Industries, IVAX}

2.2 Ejercicios (página 61)

1. F **3.** C **5.** A **7.** $\not\subseteq$ **9.** $\subseteq$ **11.** $\subseteq$ **13.** $\not\subseteq$ **15.** ambos **17.** $\subseteq$ **19.** ambos **21.** ninguno **23.** verdadera **25.** falsa **27.** verdadera **29.** verdadera **31.** verdadera **33.** verdadera **35.** falsa **37.** falsa **39.** verdadera **41.** falsa **43.** 8; 7 **45.** 64; 63 **47.** 32; 31 **49.** {2, 3, 5, 7, 9, 10} **51.** {2} **53.** {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} o U **55.** {Costo alto, Costo bajo, Educativo, Más tiempo para pasear, Menos tiempo para pasear, No poder visitar a parientes a lo largo del camino, Poder visitar a parientes a lo largo del camino} **57.** {Costo alto, Más tiempo para pasear, No poder visitar a parientes a lo largo del camino} **59.** $\emptyset$ **61.** {A, B, C, D, E} (Todas están presentes). **63.** {A, B, C}, {A, B, D}, {A, B, E}, {A, C, D}, {A, C, E}, {A, D, E}, {B, C, D}, {B, C, E}, {B, D, E}, {C, D, E} **65.** {A}, {B}, {C}, {D}, {E} **67.** 32 **69.** **(a)** 15 **(b)** 16; (Ahora es posible *no* seleccionar billetes). **71.** **(a)** s **(b)** s **(c)** $2s$ **(d)** Al agregar un elemento siempre se duplica el número de subconjuntos, por lo que la expresión 2^n en general es verdadera.

2.3 Ejercicios (página 73)

1. B **3.** A **5.** E **7.** {a, c} **9.** {a, b, c, d, e, f} **11.** {a, b, c, d, e, f, g} **13.** {b, d, f} **15.** {d, f} **17.** {a, b, c, e, g} **19.** {a, c, e, g} **21.** {a} **23.** {e, g} **25.** {d, f} **27.** {e, g}

En los ejercicios 29 a 33, puede haber otras descripciones aceptables.

29. el conjunto de todos los elementos que están en A, o no están en B y no están en C **31.** el conjunto de todos los elementos que están en C, pero no en B, o bien están en A **33.** el conjunto de todos los elementos que están en A pero no en C, o en B pero no en C **35.** $\{e, h, c, l, b\}$ **37.** $\{l, b\}$ **39.** $\{e, h, c, l, b\}$ **41.** el conjunto de todas las devoluciones de impuestos mostrando los ingresos del negocio o archivadas en 2003 **43.** el conjunto de todas las devoluciones de impuestos archivadas en 2003 sin deducciones **45.** el conjunto de todas las devoluciones de impuestos con deducciones o que muestran los ingresos del negocio, pero que no fueron seleccionadas para auditoría **47.** siempre verdadero **49.** siempre verdadero **51.** no es siempre verdadero **53.** siempre verdadero **55.** **(a)** {1, 3, 5, 2} **(b)** {1, 2, 3, 5} **(c)** Para cualesquiera conjuntos X y Y, $X \cup Y = Y \cup X$. **57.** **(a)** {1, 3, 5, 2, 4} **(b)** {1,3, 5, 2, 4} **(c)** Para cualesquiera conjuntos X, Y y Z, $X \cup (Y \cup Z) = (X \cup Y) \cup Z$. **59.** **(a)** {4} **(b)** {4} **(c)** Para cualesquiera conjuntos X y Y, $(X \cup Y)' = X' \cap Y'$. **61.** **(a)** {1, 3, 5} **(b)** Para cualquier conjunto X, $X \cup \emptyset = X$. **63.** verdadero **65.** falso **67.** verdadero **69.** verdadero

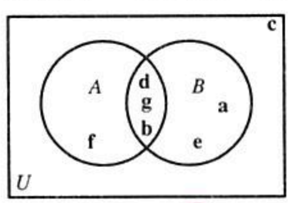
71. $A \times B = \{(2,4), (2,9), (8,4), (8,9), (12,4), (12,9)\}$; $B \times A = \{(4,2), (4,8), (4,12), (9,2), (9,8), (9,12)\}$

$B \times A = \{(6,3), (6,6), (6,9), (6,12), (8,3), (8,6), (8,9), (8,12)\}$

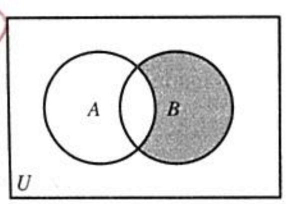
73. $A \times B = \{(\mathrm{d,p}), (\mathrm{d,i}), (\mathrm{d,g}), (\mathrm{o,p}), (\mathrm{o,i}), (\mathrm{o,g}), (\mathrm{g,p}), (\mathrm{g,i}), (\mathrm{g,g})\}$;

$B \times A = \{(\mathrm{p,d}), (\mathrm{p,o}), (\mathrm{p,g}), (\mathrm{i,d}), (\mathrm{i,o}), (\mathrm{i,g}), (\mathrm{g,d}), (\mathrm{g,o}), (\mathrm{g,g})\}$ **75.** $n(A \times B) = 6$; $n(B \times A) = 6$

77. $n(A \times B) = 210$; $n(B \times A) = 210$ **79.** 3 **81.**

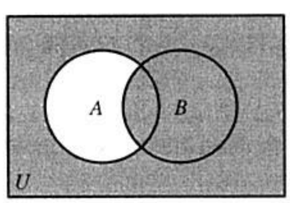


83.



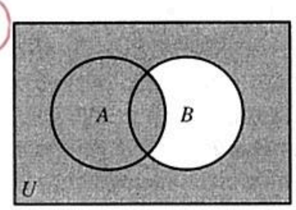
$B \cap A'$

85.



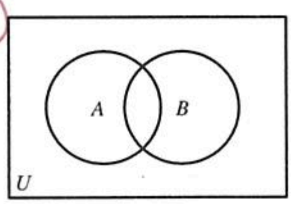
$A' \cup B$

87.



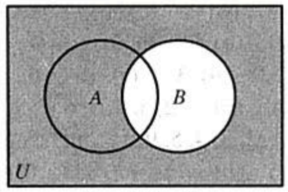
$B' \cup A$

89.



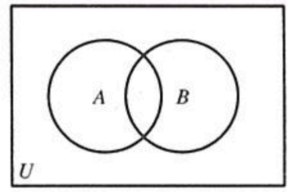
$B' \cap B = \emptyset$

91.



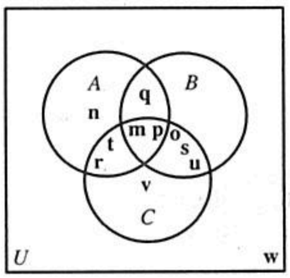
$B' \cup (A' \cap B')$

93.

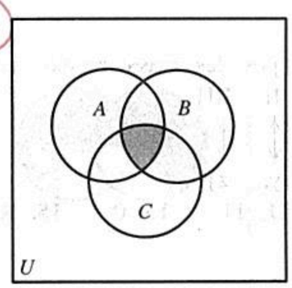


$U' = \emptyset$

95.

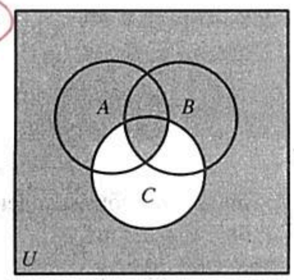


97.



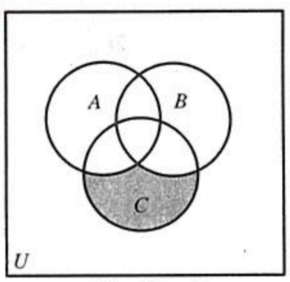
$(A \cap B) \cap C$

99.



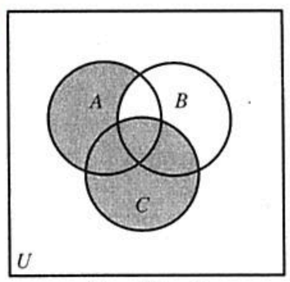
$(A \cap B) \cup C'$

101.



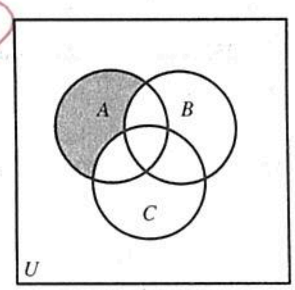
$(A' \cap B') \cap C$

103.



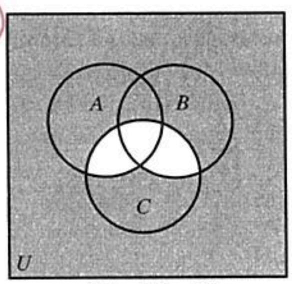
$(A \cap B') \cup C$

105.



$(A \cap B') \cap C'$

107.



$(A' \cap B') \cup C'$

109. $A' \cap B'$ o $(A \cup B)'$

111. $(A \cup B) \cap (A \cap B)'$ o $(A \cup B) - (A \cap B)$

113. $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ o $A \cap (B \cup C)$

115. $(A \cap B) \cap C'$ o $(A \cap B) - C$ **117.** $A \cap B = \emptyset$

119. El enunciado es verdadero para cualquier conjunto A. **121.** $A = \emptyset$

123. $A = \emptyset$ **125.** $A = \emptyset$ **127.** siempre es verdadero

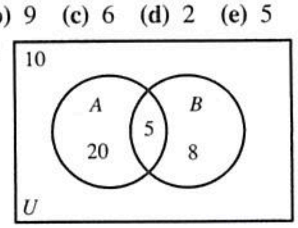
129. siempre es verdadero **131.** no siempre es verdadero

133. siempre es verdadero

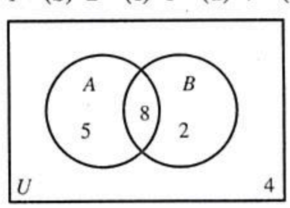
2.4 Ejercicios (página 79)

1. **(a)** 1 **(b)** 9 **(c)** 6 **(d)** 2 **(e)** 5 **3.** **(a)** 1 **(b)** 2 **(c)** 6 **(d)** 7 **(e)** 8 **(f)** 3 **(g)** 4 **(h)** 5 **5.** 17

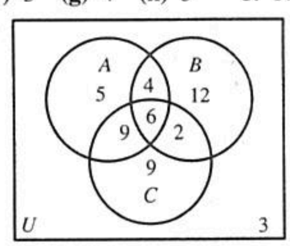
7. 16 **9.**



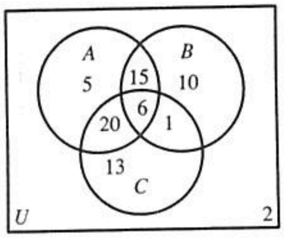
11.



13.



115.



17. **(a)** 3 **(b)** 2 **(c)** 10 **19.** **(a)** 24 **(b)** 2 **(c)** 3 **(d)** 16
21. **(a)** 0 **(b)** 4 **(c)** 3 **(d)** 0 **(e)** 6
23. **(a)** 51 **(b)** 31 **(c)** 18 **(d)** 15 **(e)** 33 **(f)** 23 **25.** 225
27. **(a)** 1 **(b)** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15 **(c)** 1, 2, 3, 4, 5, 9, 11 **(d)** 5, 8, 13
29. **(a)** 6 **(b)** 473 **(c)** 835 **(d)** 50 **(e)** 297 **(f)** 386

2.5 Ejercicios (página 88)

1. B; 1 **3.** A; $\aleph_0$ **5.** F; 0 **7.** (Son posibles otras correspondencias)

{I, II, III}
↕ ↕ ↕
{x, y, z}

9. (Son posibles otras correspondencias) **11.** 11 **13.** 0 **15.** $\aleph_0$ **17.** $\aleph_0$ **19.** $\aleph_0$ **21.** 12

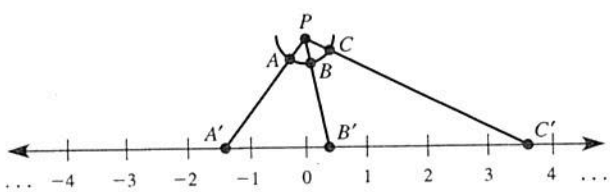
{a, d, i, t, o, n}
↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕
{a, n, s, w, e, r}

23. $\aleph_0$ **25.** ambas **27.** equivalentes **29.** equivalentes **31.** {2, 4, 6, 8, ..., $2n$, ...}
↕ ↕ ↕ ↕ ↕
{1, 2, 3, 4, ..., n, ...}

33. {1,000,000, 2,000,000, 3,000,000, ..., 1,000,000n, ...}
↕ ↕ ↕ ↕
{ 1, 2, 3, ..., n, ...}

35. {2, 4, 8, 16, 32, ..., 2^n, ...}
↕ ↕ ↕ ↕ ↕ ↕
{1, 2, 3, 4, 5, ..., n, ...}

37. Este enunciado no siempre es verdadero. Por ejemplo, sea $A =$ al conjunto de números naturales, $B =$ el conjunto de los números reales. **39.** El enunciado no siempre es verdadero. Por ejemplo, A podría ser el conjunto de todos los subconjuntos del conjunto de los reales, entonces $n(A)$ sería un número infinito *mayor* que c.
41. **(a)** Los rayos que salen del punto P establecerán una correspondencia geométrica entre los puntos del semicírculo con los puntos de la recta.



(b) El conjunto de los números reales es infinito, se ha establecido una correspondencia uno a uno con un subconjunto propio de él mismo.

43. {3, 6, 9, 12, ..., $3n$, ...}
↕ ↕ ↕ ↕ ↕
{6, 9, 12, 15, ..., $3n + 3$, ...}

45. {3/4, 3/8, 3/12, 3/16, ..., $3/(4n)$, ...}
↕ ↕ ↕ ↕ ↕
{3/8, 3/12, 3/16, 3/20, ..., $3/(4n + 4)$, ...}

47. {1/9, 1/18, 1/27, ..., $1/(9n)$, ...}
↕ ↕ ↕ ↕
{1/18, 1/27, 1/36, ..., $1/(9n + 9)$, ...}

Examen del capítulo 2 (página 91)

1. {a, b, c, d, e} **2.** {a, b, d} **3.** {c, f, g, h} **4.** {a, c} **5.** verdadero **6.** falso **7.** verdadero **8.** verdadero **9.** falso **10.** verdadero **11.** verdadero **12.** verdadero **13.** 8 **14.** 15