3

Algo de historia

Giuseppe Peano

Nació el 27 de agosto de 1858 en Cuneo, Piemonte, Italia y murió el 20 de abril de 1932 en Turín, Italia. Nació y vivió su infancia en una granja. Iba a una escuela que estaba en el pueblo de Spinetta a 5 km de su casa, por lo cuál, si la aritmética no falla, caminaba 10 km diarios. Su tío, el hermano de su madre, se dio cuenta de que Giuseppe tenía una inteligencia fuera de lo común y se lo llevó a vivir a la ciudad de Turín para darle una formación que le permitiera entrar a la universidad. Peano tenía entonces 12 años. Ingresó a la Universidad de Turín en 1876 y para 1880 ya era doctor en Matemáticas, fue durante toda su vida profesor e investigador de la Universidad de Turín. Estudió prácticamente todas las áreas de las matemáticas y en todas ellas tuvo algo nuevo que aportar. Uno de sus mejores libros fue "***Arithmetices principia, nova método exposita***" en el que formalizó, desde el punto de vista de la lógica matemática, toda la aritmética.

Peano realizó un análisis del proceso demostrativo de la matemática. Establece la formulación axiomática de la aritmética a través de sus famosos Axiomas de Peano, los cuales definen los números naturales en términos de la teoría de conjuntos, surgiendo así, la Lógica Matemática. Peano también crea el lenguaje internacional denominado Interlingüa, tomando vocabulario del inglés, francés, alemán y latín.

¿Quieres saber más? Esta información está en Internet y puedes consultar más sobre Peano.

Aritmética

NÚMEROS REALES

Algo de los números amigos:

Se dice que dos números son amigos si la suma de los divisores de cada uno de ellos es igual al otro número.

Los números 220 y 284 son amigos. Los divisores de 220 son: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 y 220, si los sumamos (excluyendo 220) da 284. Los divisores de 284 son: 1, 2, 4, 71, 142 y 284, si los sumamos (excluyendo 284) da 220.

Este par de números amigos era conocido por los griegos. El siguiente par de números amigos fue descubierto en el siglo XIII y redescubierto por Fermat en 1636 (los números 17 296 y 18 416). Descartes descubrió el siguiente par: 9 363 584 y 9 437 056.

Fermat estableció que para cualquier $n > 1$ si p, q y r (definidos por las fórmulas indicadas debajo) son primos, los números $2^n pq$ y $2^n r$ son amigos.

$$p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$$

$$q = 3 \cdot 2^n - 1$$

$$r = 9^{2n+1} - 1$$

No todos los números amigos se obtienen con esta fórmula, pero si son amigos todos los números que se obtienen con la fórmula.

Para $n = 2$, se obtienen los números 220 y 284.

El tema no avanzó más hasta que Euler descubrió la norma que cumplen estos números.

Los números perfectos cumplen la condición $2^{n-1}(2^n - 1)$ siendo $2^n - 1$ un número primo de Mersenne.

Todos estos grandes matemáticos se saltaron el par 1184–1210 que fue descubierto por un niño italiano de 16 años Niccolò Paganini.

NÚMEROS REALES

En la vida cotidiana utilizamos mucho los números reales. Por ejemplo: cuando pides la cuenta en la cafetería; la hora en que entras y sales de tus clases; el tiempo que tardas en contestar un examen; el número de ejercicios que quedan de tarea; la temperatura que hay en el salón de clases; así como cuando compras tu ropa y pides la talla correspondiente y en infinidad de cosas en donde se mide tanto la longitud, el área o el volumen o sencillamente cuando se mide el tiempo, se pesa, se asigna un precio, etcétera.

Todos estas cantidades pertenecen al conjunto de los números reales, que se designan por la letra $\mathfrak{R}$.

Estos números son los que haz trabajado en tus cursos y que te encuentras familiarizado con ellos, excepto por algunos como las raíces cuadradas de números negativos. Por ejemplo $\sqrt{-1}$ no corresponde al conjunto de los números reales. Si lo pones en una calculadora científica, o programable, te marcará un error ya que no corresponde a un número real.

En matemáticas es frecuente hablar de una colección de objetos, o elementos, bien definidos como un conjunto. Por ejemplo: Un conjunto de números que reconoces fácilmente es el conjunto de los números dígitos —que son los números que aparecen en la calculadora, en la computadora o en las teclas de los teléfonos—. De manera simbólica se puede escribir como:

$$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Recuerda que se deben usar las letras mayúsculas (en este caso el conjunto: D) para referirse a un conjunto y sus elementos se indican mediante letras minúsculas, o números, separados con comas; dentro de un par de paréntesis de llaves.

Para indicar que el elemento 1 pertenece al conjunto D se emplea el siguiente símbolo $\in$; y se utiliza la forma siguiente; $1 \in D$ y se lee: "uno es elemento del conjunto D" o "uno pertenece al conjunto D".

Para indicar que el elemento z no pertenece al conjunto D se emplea el siguiente símbolo $\notin$. Se utiliza de la forma siguiente, $z \notin D$ y se lee: "z no es elemento del conjunto D" o "z no pertenece al conjunto D".

Subconjuntos de los números reales

Si se tiene el conjunto $A = \{a, b, c\}$, se pueden formar otros conjuntos tomando algunos de los elementos de A. Al tomar algunos de los elementos no importa el orden en que aparecen los elementos, ya que sería lo mismo referirse al conjunto $\{a, b\}$ o al $\{b, a\}$. Del conjunto A referido serían: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$, $\{a\}$, $\{b\}$ y $\{c\}$. Cada uno de estos conjuntos, que no son elementos, se les llama subconjuntos del conjunto A.

De aquí podemos referirnos al conjunto potencia. El número de subconjuntos que tiene el conjunto potencia se obtiene tomando como base al número dos y elevándolo al número de elementos que tiene el conjunto (A); en este caso sería $2^3 = 8$. El conjunto potencia de A sería: $\{\{a, b, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{\ \}\}$.

El último subconjunto, indicado únicamente por el par de llaves ($\{\ \}$) se puede indicar también por la letra griega ϕ –phi–, lo conocemos como el conjunto vacío –recibe este nombre porque carece de elementos–.

Observa que en el conjunto potencia siempre aparecen como subconjuntos el conjunto dado y el conjunto vacío.

Al estudiar los números reales vale la pena conocer, o recordar, algunos de sus subconjuntos que se emplean frecuentemente. Se mencionan a continuación.

Números naturales

Designado con la letra $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, ...\}$, también conocidos como el conjunto de los números enteros positivos. Originalmente sirvieron para contar y ordenar.

Estos números se caracterizan por tener como primer elemento el 1, cada elemento siguiente será $n + 1$, donde $n \in N$. Esto lo refirió Giuseppe Peano, en 1889, y le dio una base axiomática a la Aritmética.

El conjunto de los números naturales es un conjunto con un número infinito de elementos, indicado por los tres puntos suspensivos. Entendemos por conjunto infinito aquel en que no se puede contar sus elementos. Dentro de los números naturales existen otros subconjuntos que tienen ciertas características, mencionaremos algunos de ellos.

El conjunto de los múltiplos de un número n. Si llamamos a M dicho conjunto –por la abreviación de múltiplo–. Lo podemos indicar de la forma siguiente: $M = \{n, 2n, 3n, 4n, 5n, 6n, ...\}$ donde n es cualquier número natural. Por ejemplo, el conjunto de los múltiplos de 6 es $\{6, 2(6), 3(6), 4(6), 5(6), 6(6), ...\} = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, ...\}$, podemos indicar que 12 es un múltiplo de 6, así como también 18, 24, etcétera son múltiplos de 6. Recuerda que si 12 es un múltiplo de 6, podemos decir que 12 es divisible entre 6 o bien que 6 es un factor de 12. ¿Puedes indicar los factores de 12? —Los factores son: 2, 3, 4 y 6. Los factores primos son: 2 (que está dos veces) y 3—.

Un subconjunto de los números naturales que tiene mucha importancia en los procesos aritméticos es el conjunto de los números primos. Sus elementos sólo son divisibles entre ellos mismos y la unidad. Debido a la importancia de estos números los estudiaremos más adelante.

Por el momento recuerda que los **números primos** son: $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ...\}$. Se les puede designar con la letra P, para recordar que son los primos. El conjunto de los Números primos también es un conjunto de números infinito.

El subconjunto de los números naturales que no son primos se les llama **números compuestos**. Estos son: $\{4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 21, ...\}$

Se llaman números compuestos porque están compuestos por el producto de números primos.

Ejemplos: $20 = 2 \times 2 \times 5$ o indicándolo en forma de potencia es $2^2 \times 5$;

$$21 = 3 \times 7.$$

Números enteros

Los números naturales los podemos llamar también los **números enteros positivos**.

El conjunto de los números enteros negativos lo conforman los elementos de los Números naturales, pero anteponiendo el signo negativo a cada uno de ellos: $\{-1, -2, -3, -4, -5, -6, -7, -8, -9, -10, -11, -12, -13, \dots\}$. El hombre los empezó a utilizar en el siglo XII ocasionalmente, para designar pérdidas en cuestiones financieras.

Si se une el elemento cero –el cual fue empezado a estudiarse hasta el año 1200 d.C. en Europa por Leonardo Pisano, más conocido como Fibonacci; y también conocido por los mayas, en el siglo V, en América– con el conjunto de los números naturales; se tiene el conjunto $W = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ llamado el conjunto de los **números enteros no negativos.**

Si se unen los conjuntos de los números enteros negativos con el elemento cero y los Números naturales, se forma el conjunto de los **números enteros**; que generalmente se les designa con la letra Z.

Simbólicamente: $Z = \{\text{enteros negativos}\} \cup \{0\} \cup N$

$$Z = \{\text{enteros negativos}\} \cup W$$

o en su forma de extensión o enumeración: $Z = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$.
El cual también es un conjunto infinito.

Podrás notar que el conjunto de los números naturales está contenido en el conjunto de los números enteros, es decir, los números naturales son un subconjunto de los números enteros. Esto se simboliza como: $N \subset Z$ y se lee: N está contenido en Z o N es un subconjunto de Z.

Algunos subconjuntos de los números enteros son:

El subconjunto de los **números pares positivos:** $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$, que tienen la característica de tener al número 2 como factor; es decir, $2 = 2(1)$, $4 = 2(2)$, $6 = 2(3)$, $8 = 2(4)$, $10 = 2(5)$, $12 = 2(6)$, ... que tienen la forma: $2n$, donde n es un número natural.

Tenemos también el subconjunto de los **números pares negativos:**
$\{-2, -4, -6, -8, -10, -12, \dots\}$
y también tienen la característica de tener el 2 como factor; $-2 = 2(-1)$, $-4 = 2(-2)$, $-6 = 2(-3)$, etcétera.

En general, cualquier número par es de la forma $2n$; donde n es un número entero (positivo o negativo).

Nota: Todos los números pares son divisibles entre 2, ya sean positivos o negativos.

Tenemos también el subconjunto de los números impares, ya sean positivos o negativos, cuya característica es que son una unidad mayor (o menor) que algún número par; o bien, que se encuentran entre dos números pares.

Por ejemplo: $5 = 4 + 1$ o bien $5 = 6 - 1$, $7 = 6 + 1$ o también $7 = 8 - 1$, $9 = 8 + 1$ o bien $9 = 10 - 1$, etcétera. Se puede generalizar que cualquier número impar es de la forma: $2n + 1$, o bien $2n - 1$; donde n es un número par.

Se considera al número cero como un número par, por estar entre -1 y 1; los cuales son números impares, por lo que podemos indicar que entre dos números impares hay un número par o que entre dos números impares hay un número par.

Un subconjunto de los números enteros que tiene mucha importancia, y que hemos mencionado ya, es el conjunto de los números **dígitos**, que son la base de la construcción de cualquier número entero. El conjunto de los dígitos es: $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Con estos números podemos indicar la cantidad de 21 461 kilómetros cuadrados –que es la superficie de la República Mexicana–; el año 2020. Y en general cualquier número, ya sea que contenga ceros o no, está formado por los dígitos.

Los dígitos están constituidos de cinco números impares: 1, 3, 5, 7 y 9; y de cinco números pares: 0, 2, 4, 6 y 8. Recuerda que el cero lo consideramos como un número par.

Otro subconjunto es el de los cuadrados perfectos $\{ 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \ldots \}$ y se puede representar cualquier elemento de el como n^2; donde $n \in N$. Este conjunto es también infinito. También tendríamos el de los cubos perfectos $\{ 1, 8, 27, 64, 125, \ldots\}$ representados como n^3, donde $n \in N$.

Números racionales

Con los números que llevamos estudiados, y sus subconjuntos, todavía no es posible estudiar la situación hipotética del rey que muere y deja su reino, repartido a partes iguales, entre sus tres hijos varones —considerando a un rey benevolente que no le deja todo el reino al hijo primogénito—. ¿Cuánto le toca a cada uno de sus hijos?

Como este problema no se puede resolver con los números enteros, entonces el hombre tuvo la necesidad de definir a los números racionales o las fracciones, más conocidos como los quebrados.

Los números racionales, las fracciones o los quebrados, son necesarios para poder describir cantidades numéricas relacionadas a cocientes, ya sea de porcentajes, de razones entre cantidades, probabilidades, etc. Las fracciones, debido a su importancia, las estudiaremos en un apartado posterior.

Para obtener dichos números se hace uso del conjunto de los números enteros. A este conjunto de fracciones se les llama el conjunto de los **números racionales** y se les designa con la letra Q, se definen como:

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in Z, b \in Z; b \neq 0 \right\}$$

y se lee de la siguiente manera: "Q es igual al conjunto de todas las fracciones $\frac{a}{b}$ tal que a pertenece al conjunto de los números enteros, b pertenece al conjunto de los números enteros; con la condición de que el elemento b debe ser diferente de cero".

El elemento b puede ser uno y entonces podemos indicar que todo número entero queda como el cociente del número dado entre 1. Por comodidad no escribimos un número entero de esa manera, pero esto nos dice que un número entero se puede considerar como un Número racional.

La única condición que no debemos olvidar es que el divisor (b) no puede ser cero.

Debe quedar claro que la división entre cero no está definida. Si efectúas la operación en una calculadora podrás darte cuenta que te marca un ERROR de división por cero.

A modo de ejemplo podemos indicar que -5 es igual a $\frac{-5}{1}$, así como 5 es igual a $\frac{5}{1}$; el elemento cero se puede indicar como $\frac{0}{1}$.

De acuerdo a la forma de representar a los subconjuntos, se puede indicar que los números enteros es un subconjunto del conjunto de los números racionales.

En forma simbólica lo indicamos como: $Z \subset Q$ y se lee "el conjunto de los números enteros (Z) es un subconjunto de los números racionales (Q)".

Con frecuencia efectuamos la operación de la división de las fracciones y las indicamos como números decimales, por ejemplo $\frac{3}{2} = 1.5$, $\frac{523}{1000} = 0.523$, $\frac{1}{3} = 0.3333...$

En ocasiones la división es exacta; como el 3/2 y solo escribimos el resultado de la división como 1.5 y no como 1.500...; ya que por comodidad omitimos los ceros a la derecha y los puntos que indican periodicidad.

Pero podemos tener un número decimal infinito periódico, como 1/3 que es igual a 0.33... indicando los puntos suspensivos que sigue el tres en forma infinita.

Incluso puede ser un número entero, por ejemplo $12/3 = 4$ sin necesidad de escribir 4.00... Aunque no escribimos los ceros a esta sucesión y la de 1/3 decimos que tiene periodicidad. Hay ocasiones en que el número no es el mismo en la periodicidad. Se ve más claro con la fracción $\frac{4}{7} = 0.\underbrace{571428}571428...$ cuya periodicidad es 571428.

En muchas ocasiones es mejor dejar indicado el número racional como el cociente de dos enteros y no darlo con el resultado de la división. ¿Por qué?, pues porque muchas veces no se indica la periodicidad y entonces ya no es el número que estamos hablando.

Números irracionales

Existen expresiones decimales infinitas que no tiene una representación como un número racional, por no tener periodicidad. Recuerda que esto indica que se repite un número, o una serie de números.

Ejemplos: la expresión 3.141592654..., en donde los tres puntos suspensivos indican que se continúan escribiendo más números. Tal expresión corresponde al valor de la constante conocida como el número π. Análogamente, la expresión 1.414213562... corresponde al valor de $\sqrt{2}$, que tampoco se puede escribir como el cociente de dos cantidades (número racional), o 2.718281828... que es el número e.

A este tipo de expresiones, que no tienen periodicidad, y que no se pueden escribir como Números racionales se les llama **números irracionales**. Generalmente se les designa con la letra Q'.

Existen más expresiones que son números irracionales, por ejemplo, $\sqrt{3} = 1.732050808 \ldots$, $\sqrt[3]{5}$, $\frac{\pi}{2}$, etcétera. Observa que la última es el cociente de un número irracional con uno racional, y sigue siendo irracional porque al efectuar la operación de la división queda: 1.570796327... que no tiene periodicidad.

Si tenemos las raíces: $\sqrt{4}, \sqrt{25}, \sqrt[3]{27}$ que corresponden a cuadrados o cubos perfectos, no las podemos considerar como números irracionales. Para las raíces mencionadas tenemos por solución: 2, 5, 3, respectivamente; que corresponden a números naturales. Esto quiere decir que las raíces que son exactas no son números irracionales.

Obsérvese que todo elemento del conjunto de los números racionales no puede ser elemento del conjunto de los números irracionales y viceversa, es decir, ambos conjuntos son ajenos o disjuntos (no tienen elementos en común).

Si se forma la unión de ambos conjuntos, $Q \cup Q'$, se tiene el conjunto que conocemos como los números reales y lo denotamos por la letra $\mathfrak{R}$.

Existen más subconjuntos de números que se pueden clasificar dentro de alguno de los conjuntos anteriores, pero los referidos son los más empleados en los procesos aritméticos.

Dando un pequeño resumen:

El conjunto de los números naturales (N) sirvieron originalmente para contar.

El conjunto de los números enteros (Z) con sus subconjuntos: los números enteros negativos, el elemento 0 y los números enteros positivos (naturales) sirvieron para poder referirse a cuestiones financieras, en donde ya se podía quedar a deber —con los números negativos—.

El conjunto de los números racionales (Q) con algunos de sus subconjuntos: los números enteros y los números naturales; sirvieron para obtener las fracciones y poder repartir desde los alimentos —un queso, un pan o una manzana—, hasta los territorios conquistados.

El conjunto de los números irracionales (Q') que sirvieron para obtener las áreas (con su número π) y las relaciones entre los catetos y la hipotenusa en los triángulos rectángulos (teorema de Pitágoras).

El conjunto de los números reales ($\mathfrak{R}$) con sus grandes subconjuntos: los números racionales y los números irracionales; estos son con los que trabajamos en muchas de las ramas de las matemáticas como la Aritmética, Álgebra, Trigonometría, Cálculo y utilizados en otras ciencias como la Física, la Economía, Biología, Química, etcétera.

Simbólicamente, se tienen las relaciones existentes entre los subconjuntos de números de la manera siguiente:

$$N \subset Z \subset Q \subset \mathfrak{R}$$

$$Q' \subset \mathfrak{R}$$

Y la notación importante:

$$\mathfrak{R} = Q \cup Q'$$

Ejemplos

1. Del conjunto $A = \{-3,\ 2/5,\ \sqrt{2},\ 0.6,\ 7,\ \pi/2,\ 9,\ \sqrt{-5}\}$, clasificar cada elemento en los subconjuntos N (naturales), Z (enteros), Q (racionales), Q' (irracionales) y el conjunto $\mathfrak{R}$ (reales).

Solución

$-3 \in Z, Q, \mathfrak{R}$	$2/5 \in Q, \mathfrak{R}$	$\sqrt{2} \in Q', \mathfrak{R}$	$0.6 \in Q, \mathfrak{R}$
$7 \in N, Z, Q, \mathfrak{R}$	$\pi/2 \in Q', \mathfrak{R}$	$9 \in N, Z, Q, \mathfrak{R}$	$\sqrt{-5} \notin \mathfrak{R}$.

Observa que el último elemento no pertenece al conjunto de los números reales. (Adelantando un poco; estos números corresponden al conjunto de los Números complejos, que no estudiaremos por el momento. Estos se verán más adelante, por ejemplo para dar la solución de algunas ecuaciones de segundo grado).

2. Del conjunto $B = \{-7, -\sqrt{25}, -0.666..., 0, 1/2, 1.75, 3\pi/4, \sqrt{7}, 3, \sqrt{-1}\}$, escribir todos los elementos que pertenezcan a cada uno de los conjuntos $N, Z, Q, Q', \mathfrak{R}$.

Solución:

$N = \{ 3 \}$

$Z = \{ -7, -5, 0, 3 \}$

$Q = \{-7, -5, 0, 1/2, 3, -0.666..., 1.75 \}$

$Q' = \{ 3\pi/4, \sqrt{7}\}$

$\mathfrak{R} = \{ -7, -5, -0.666..., 0, 1/2, 1.75, 3\pi/4, \sqrt{7}, 3 \}$

Además, recuerda que $\sqrt{-1}$ es un elemento que <u>no</u> pertenece a los $\mathfrak{R}$.

Nota: recuerda que $-\sqrt{25}$ es una raíz exacta, ya que contiene un cuadrado perfecto, y corresponde al valor de -5.